

# 标准算法类样题（一）

以下四道样题参考“CSP”历年真题，样题仅用于备赛参考，报名结束后将开放在线练习。

## 题目一

赛题名称：田地丈量

时间限制：1.0 s

内存限制：512.0 MB

### 1.1 题目描述

西西艾弗岛上散落着  $n$  块田地。每块田地可视为平面直角坐标系下的一块矩形区域，由左下角坐标  $(x_1, y_1)$  和右上角坐标  $(x_2, y_2)$  唯一确定，且满足  $(x_1 < x_2)$ 、 $(y_1 < y_2)$ 。这  $n$  块田地中，任意两块的交集面积均为 0，仅边界处可能有所重叠。

最近，狻狻想要在南山脚下开垦出一块面积为  $a \times b$  矩形田地，其左下角坐标为  $(0, 0)$ 、右上角坐标为  $(a, b)$ 。试计算狻狻选定区域内已经存在的田地面积。

### 1.2 输入格式

从标准输入读入数据。

输入共  $n + 1$  行。

输入的第一行包含空格分隔的三个正整数  $n$ 、 $a$  和  $b$ ，分别表示西西艾弗岛上田地块数和狻狻选定区域的右上角坐标。

接下来  $n$  行，每行包含空格分隔的四个整数  $x_1$ 、 $y_1$ 、 $x_2$  和  $y_2$ ，表示一块田地的位置。

### 1.3 输出格式

输出到标准输出。

输出一个整数，表示狻狻选定区域内的田地面积。

### 1.4 样例输入

```
4 10 10
0 0 5 5
5 -2 15 3
8 8 15 15
```

-2 10 3 15

## 1.5 样例输出

44

## 1.6 样例解释

如图所示，选定区域内田地（绿色区域）面积为 44。

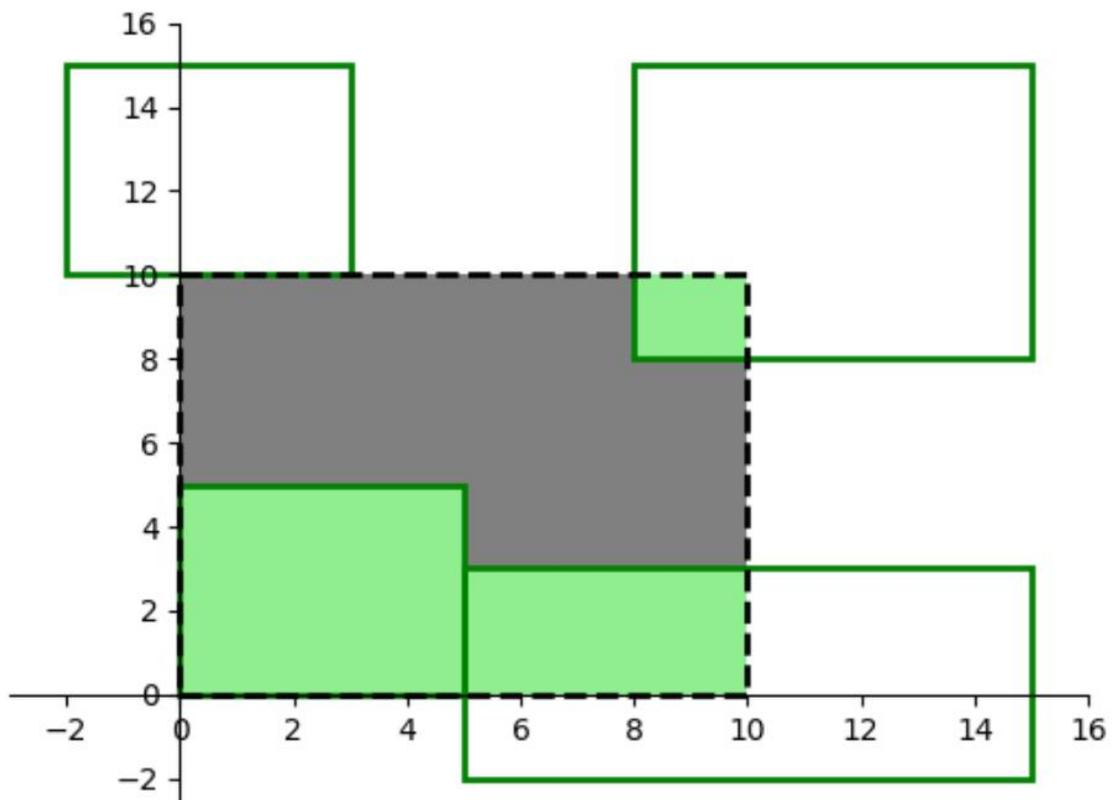


图 1.1

## 1.7 子任务

全部的测试数据满足  $n \leq 100$ ，且所有输入坐标的绝对值均不超过  $10^4$ 。

## 1.8 评分标准

本题目满分 100 分，共 10 个测试，每个 10 分。

## 题目二

赛题名称：垦田计划

时间限制：1.0 s

内存限制：512.0 MB

### 2.1 题目描述

狻狻总共选中了  $n$  块区域准备开垦田地，由于各块区域大小不一，开垦所需时间也不尽相同。据估算，其中第  $i$  块 ( $1 \leq i \leq n$ ) 区域的开垦耗时为  $t_i$  天。这  $n$  块区域可以同时开垦，所以总耗时  $t_{Total}$  取决于耗时最长的区域，即：

$$t_{Total} = \max\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

为了加快开垦进度，狻狻准备在部分区域投入额外资源来缩短开垦时间。具体来说：

- 在第  $i$  块区域每投入  $c_i$  单位资源，便可将其开垦耗时缩短 1 天；
- 耗时缩短天数以整数记，即第  $i$  块区域投入资源数量必须是  $c_i$  的整数倍；
- 在第  $i$  块区域最多可投入  $c_i \times (t_i - k)$  单位资源，将其开垦耗时缩短为  $k$  天；
- 这里的  $k$  表示开垦一块区域的最少天数，满足  $0 < k \leq \min\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ ；换言之，如果无限制地投入资源，所有区域都可以用  $k$  天完成开垦。

现在狻狻手中共有  $m$  单位资源可供使用，试计算开垦  $n$  块区域最少需要多少天？

### 2.2 输入格式

从标准输入读入数据。

输入共  $n + 1$  行。

输入的第一行包含空格分隔的三个正整数  $n$ 、 $m$  和  $k$ ，分别表示待开垦的区域总数、狻狻手上的资源数量和每块区域的最少开垦天数。

接下来  $n$  行，每行包含空格分隔的两个正整数  $t_i$  和  $c_i$ ，分别表示第  $i$  块区域开垦耗时和将耗时缩短 1 天所需资源数量。

### 2.3 输出格式

输出到标准输出。

输出一个整数，表示开垦  $n$  块区域的最少耗时。

### 2.4 样例输入 1

```
4 9 2
6 1
```

5 1  
6 2  
7 1

## 2.5 样例输出 1

5

## 2.6 样例解释 1

如下表所示，投入 5 单位资源即可将总耗时缩短至 5 天。此时俊俊手中还剩余 4 单位资源，但无论如何安排，也无法使总耗时进一步缩短。

$i$	基础耗时 $t_i$	缩减 1 天所需资源 $c_i$	投入资源数量	实际耗时
1	6	1	1	5
2	5	1	0	5
3	6	2	2	5
4	7	1	2	5

表 2.1

## 2.7 样例输入 2

4 30 2  
6 1  
5 1  
6 2  
7 1

## 2.8 样例输出 2

2

## 2.9 样例解释 2

投入 20 单位资源，恰好可将所有区域开垦耗时均缩短为  $k = 20$  天；受限于  $k$ ，剩余的 10 单位资源无法使耗时进一步缩短。

## 2.10 子任务

70% 的测试数据满足： $0 < n, t_i, c_i \leq 100$  且  $0 < m \leq 10^6$ ；

全部的测试数据满足： $0 < n, t_i, c_i \leq 10^5$  且  $0 < m \leq 10^9$ 。

## 2.11 评分标准

本题目满分 100 分，共 20 个测试，每个 5 分。

## 题目三

赛题名称：矩阵运算

时间限制：5.0 s

内存限制：512.0 MB

### 3.1 题目背景

$\text{Softmax}(\frac{Q \times K^T}{\sqrt{d}}) \times V$  是 *Transformer* 中注意力模块的核心算式，其中  $Q$ 、 $K$  和  $V$  均是  $n$  行  $d$  列的矩阵， $K^T$  表示矩阵  $K$  的转置， $\times$  表示矩阵乘法。

### 3.2 题目描述

为了方便计算，狻狻同学将 *Softmax* 简化为了点乘一个大小为  $n$  的一维向量  $W$ ：

$$(W \cdot (Q \times K^T)) \times V$$

点乘即对应位相乘，记  $W^{(i)}$  为向量  $W$  的第  $i$  个元素，即将  $(Q \times K^T)$  第  $i$  行中的每个元素都与  $W^{(i)}$  相乘。

现给出矩阵  $Q$ 、 $K$  和  $V$  和向量  $W$ ，试计算狻狻按简化的算式计算的结果。

### 3.3 输入格式

从标准输入读入数据。

输入的第一行包含空格分隔的两个正整数  $n$  和  $d$ ，表示矩阵的大小。

接下来依次输入矩阵  $Q$ 、 $K$  和  $V$ 。每个矩阵输入  $n$  行，每行包含空格分隔的  $d$  个整数，其中第  $i$  行的第  $j$  个数对应矩阵的第  $i$  行、第  $j$  列。

最后一行输入  $n$  个整数，表示向量  $W$ 。

### 3.4 输出格式

输出到标准输出。

输出共  $n$  行，每行包含空格分隔的  $d$  个整数，表示计算的结果。

### 3.5 样例输入

```
3 2
1 2
3 4
5 6
10 10
-20 -20
30 30
6 5
4 3
```

```
2 1
4 0 -5
```

### 3.6 样例输出

```
480 240
0 0
-2200 -1100
```

### 3.7 子任务

70% 的测试数据满足： $n \leq 100$  且  $d \leq 10$ ；输入矩阵、向量中的元素均为整数，且绝对值均不超过 30。

全部的测试数据满足： $n \leq 10^4$  且  $d \leq 20$ ；输入矩阵、向量中的元素均为整数，且绝对值均不超过 1000。

### 3.8 提示

请谨慎评估矩阵乘法运算后的数值范围，并使用适当数据类型存储矩阵中的整数。

### 3.9 评分标准

本题目满分 100 分，共 20 个测试，每个 5 分。

## 题目四

赛题名称：电力网络

时间限制：1.0 s

内存限制：512.0 MB

### 4.1 题目描述

西西艾弗岛电力公司需要修建一套电网对岛上的众多城镇进行供电。电网设施包括建造在城镇中的变电站，与建造在城镇间的输电线路。根据前期的考察结果，电力公司已经确定了哪些城镇之间需要建造输电线路，以使得所有城镇能够被连接成一个电力网络。每座城镇只需要建造一个变电站，却都向电力公司提供了多个建造候选地址。对于每个城镇，不同候选地址的变电站造价不同；对于城镇间的输电线路，其造价也会随着两端变电站的候选地址的变化而变化。因此，电力公司想要知道，在所有候选地址的组合中，电网的总造价（变电站造价加上输电线路造价）最低是多少。

### 4.2 输入格式

从标准输入读入数据。

输入的第一行包括三个正整数  $N$ 、 $M$ 、 $K$ 。表示一共有  $N$  座城镇，需要建造  $M$  条输电线路，每座城镇都提供了  $K$  个变电站候选地址。

接下来输入  $N$  行，每行表示一个城镇。每行包含  $K$  个整数，表示该城镇不同候选地址的变电站造价。

接下来  $M$  行，每行表示一条输电线路，包含  $K^2 + 2$  个整数。前两个整数表示该输电线路两端的城镇，范围是  $[0, N)$ 。第三个整数开始是大小为  $K \times K$  的矩阵  $T$  的行主序存储形式。 $T_{ij}$  表示当输电线路的第一个端点选择候选地址  $i$ ，第二个端点选择候选地址  $j$  时的线路造价。

### 4.3 输出格式

输出到标准输出。

输出包含一行，这一行有一个整数，表示电网的最低总造价。

### 4.4 样例输入

```
2 1 2
1 2
3 4
0 1 1 2 3 4
```

## 4.5 样例输出

5

## 4.6 样例解释

城镇 0 与城镇 1 均选择了 0 号地址建造变电站。

## 4.7 子任务

对于全部数据，保证由城镇与输电线路构成的图是无向无重边无自环的连通图，保证单个变电站与单条线路的造价均不超过 1000。

对于 20% 的数据，保证  $N \leq 6$ ， $K \leq 10$ 。

对于另外 20% 的数据，保证  $N \leq 10^4$ ， $K \leq 10$ ， $M = N - 1$ 。

对于另外 20% 的数据，保证  $N \leq 10^4$ ， $K \leq 10$ ， $M = N$ 。

对于另外 20% 的数据，保证  $N \leq 10^4$ ， $K \leq 10$ 。图中存在两个节点  $S$ 、 $D$ ，保证全图去除  $D$  节点和与  $D$  节点相连的边后，可以构成以  $S$  节点为根的一棵树，而且所有与  $D$  相连的节点都属于这棵树的叶子节点。

对于最后 20% 的数据，保证  $N \leq 10^4$ ， $K \leq 10$ ，且度数大于 2 的节点数量  $\leq 6$ 。

## 4.8 评分标准

本题目满分 100 分，共 10 个测试，每个 10 分。